PREUNIVERSITARIO
PEDRO DE VALDIVIA

TIPS DE MATEMÁTICA Nº 1

1. Una fórmula para calcular el área de un triángulo de lados **a**, **b** y **c** es la fórmula de Herón: $\mathbf{A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$, donde **p** es el semiperímetro del triángulo. Entonces, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

   I) Un triángulo equilátero de lado **q**, tiene altura $\frac{2A}{q}$.
   II) Un triángulo isósceles de hipotenusa 8 cm tiene área 16 cm^2.
   III) El área de un triángulo isósceles de lado 10 cm y base 16 cm es 48 cm^2.

   A) Sólo I
   B) Sólo I y II
   C) Sólo I y III
   D) Sólo II y III
   E) I, II y III

2. Si **p** es un número real, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

   I) p^2 es positivo.
   II) $\sqrt{p^2} = P$
   III) $\sqrt{-p}$ no es un número real.

   A) Sólo I
   B) Sólo II
   C) Sólo II y III
   D) I, II y III
   E) Ninguna de ellas

3. En la figura 1, el ΔABC es rectángulo en B. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**?

   I) Al aplicar una simetría axial con respecto a $\overline{AB}$, se obtiene, con la figura original un triángulo equilátero.
   II) Al aplicar una simetría axial con respecto a $\overline{BC}$, se obtiene, con la figura original, un triángulo isósceles.
   III) Al aplicar una simetría axial con respecto a $\overline{AC}$, se obtiene un cuadrilátero asimétrico.

   A) Sólo I
   B) Sólo II
   C) Sólo III
   D) Sólo I y II
   E) I, II y III

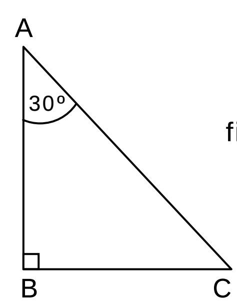


fig. 1

4. He decidido disminuir la cantidad de cigarrillos que consumo diariamente, para lo cual, cada día fumaré la mitad de lo que fumé el día anterior. ¿Al cabo de cuántos días habré dejado de fumar, si el día que comencé, fumé 28 cigarrillos?

A) 7 días
B) 5 días
C) 4 días
D) 3 días
E) Ninguna de las anteriores

5. Se sabe que $\log_a b^c = \dfrac{c \log b}{\log a}$, entonces $\log_a \left(\log_a a^a \right) =$

A) a log a – log a
B) 0
C) a
D) log a – a log a
E) $\log a^{a-1}$

6. En la figura 2, el cuadrado ABCD de lado 4 se rota en 45º, en sentido antihorario en torno al vértice D, obteniéndose el cuadrado A'B'C'D. Entonces, el área de la región achurada es

A) $14 - \sqrt{2}$
B) $14 - 4\sqrt{2}$
C) $16 - \sqrt{2}$
D) $32 - 16\sqrt{2}$
E) $32 - 8\sqrt{2}$

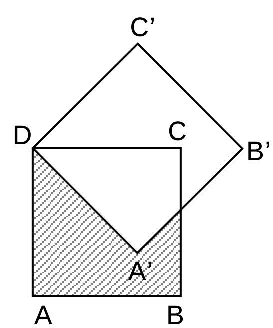


fig. 2

Solucionario

1. **Comentario:**
Generalmente se tiende a utilizar siempre la fórmula dada, lo que a veces, como se indica en la respuesta de las afirmaciones I y II, no es necesario.

Solución:

I) $p = \frac{3q}{2}$ y $(p - q) = \frac{q}{2}$

$$A = \sqrt{\frac{3q}{2} \cdot \frac{q}{2} \cdot \frac{q}{2} \cdot \frac{q}{2}} = \sqrt{\frac{3q^4}{2^4}} = \frac{q^2}{3}\sqrt{3}$$

$$\frac{2A}{q} = \frac{2q^2\sqrt{3}}{4q} = \frac{q\sqrt{3}}{2}$$

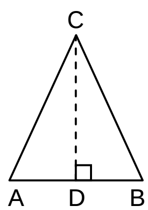
Por lo tanto esta afirmación es verdadera.

Para las afirmaciones II y III, no es necesario utilizar la fórmula de Herón, ya que es más fácil lo siguiente:

I) hipotenusa = 8 cm $\Rightarrow$ cateto = $4\sqrt{2}$ cm

Área = $\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 16$ cm^2 (Verdadero)

II)



$\overline{AB} = 16$ cm $\overline{AC} = 10$ cm $= \overline{BC}$

$\overline{AD} = 8$ cm $\overline{CD} = 6$ cm

área = $\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CD} = 48$ cm^2

Alternativa correcta: es la **E**.

2. **Comentario:**
Para cada una de las afirmaciones se debe tener presente que:

I) El cero también es un número real.
II) Si se desconoce que es positivo, no se puede deducir que $\sqrt{p} = p$.
III) El signo negativo delante de una letra **no** significa que dicha letra con el signo negativo represente un número negativo.

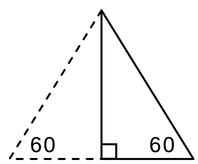
Solución:

I) Falso, pues si $p = 0$, $p^2 = 0$.
II) Falso, pues $\sqrt{p^2} = |p|$.
III) Falso, pues si $p < 0$, entonces $-p > 0$ y por lo tanto $\sqrt{-p}$ es un número real.

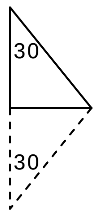
Alternativa correcta: es la **E**.

3. **Comentario:**
Al aplicar una simetría con respecto a una recta, ésta **siempre** será eje de simetría de la figura resultante, por lo que se obtendrá una figura simétrica.

Solución:

I) 

Verdadera

II) 

Verdadera

III) Si $\overline{AC}$ es eje de simetría, el cuadrilátero que se obtiene no puede ser asimétrico.

Alternativa correcta: es la **C**.

4. **Comentario:**
El problema es una adaptación de la paradoja de Zerón. Nunca ocurrirá que la mitad de una cantidad, llegue a ser cero.

Solución:

1^{er} día 28 cigarrillos
2^{do} día 14 cigarrillos
3^{er} día 7 cigarrillos
4^{to} día 3,5 cigarrillos
5^{to} día 1,75 cigarrillos

En estricto rigor, de esta manera nunca dejaría de fumar, ya que es imposible llegar a cero cigarrillos.

Alternativa correcta: es la **E**.

5. **Comentario:**
La propiedad indicada es un simple distractor, que no es necesario utilizar para solucionar el problema.

Solución:

$$\log_a a^a = a \log_a a$$

Alternativa correcta: es la **C**.

6. **Comentario:**
Al rotar en el ángulo indicado, el lado $\overline{A'B}$ del cuadrado A’B’C’D, está contenido en la diagonal del cuadrado ABCD, por lo que el problema se remite a sumar el área del triángulo rectángulo isósceles A’BP a la mitad del área del cuadrado original.

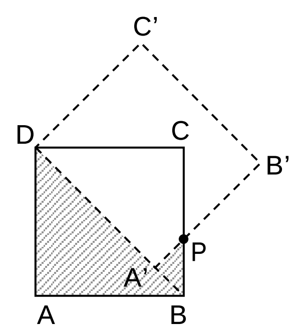
Solución:

Al prolongar DA’ se observa que $\overline{DB} = 4\sqrt{2}$ y que $\overline{DA} = 4$, por lo que $\overline{A'B} = 4\sqrt{2} - 4$.

Luego, ΔA’BP es isósceles rectángulo de lado $4\sqrt{2} - 4$, por lo tanto su área es $8(3 - 2\sqrt{2}) = 24 - 16\sqrt{2}$

Por otro lado, el área del ΔABD = 8.

Así, el área achurada es $24 - 16\sqrt{2} + 8 = 32 - 16\sqrt{2}$



Alternativa correcta: es la **D**.